

AKADEMIK LITSEYLARDA AYLANA VA DOIRA MAVZUSINI O‘QITISHNING NAZARIY VA AMALIY ASOSLARI

Xatamova Munira G‘oyibnazarovna

“Tabiiy va aniq fanlar” ga ixtisoslashtirilgan

S.H.Sirojiddinov nomli Respublika akademik

litseyi matematika o‘qituvchisi

Annotatsiya: Ushbu maqolada akademik litsey matematika kursining muhim bo‘limlaridan biri hisoblangan aylana va doira mavzusining nazariy asoslari, geometrik mazmuni, asosiy xossalari hamda o‘qitish metodikasi yoritilgan. Mavzuni o‘qitishda zamonaviy pedagogik texnologiyalar va interfaol metodlardan foydalanishning afzalliklari tahlil qilingan. Shuningdek, aylana va doira bilan bog‘liq formulalar, teoremlar va amaliy masalalarning yechimlari keltirilgan.

Kalit so‘zlar: aylana, doira, radius, diametr, geometriya, akademik litsey, matematika ta’limi, pedagogik texnologiyalar.

Kirish

Mamlakatimizda ta’lim tizimini takomillashtirish va yoshlarning matematik savodxonligini oshirish davlat siyosatining ustuvor yo‘nalishlaridan biri hisoblanadi. Geometriya kursi matematikaning muhim tarkibiy qismi bo‘lib, o‘quvchilarning mantiqiy fikrlashi, fazoviy tasavvuri va ilmiy dunyoqarashini rivojlantirishda muhim o‘rin tutadi.

Aylana va doira mavzusi geometriyaning asosiy tushunchalaridan biri bo‘lib, u nafaqat matematika, balki fizika, astronomiya, muhandislik va texnika fanlarida ham keng qo‘llaniladi. Ushbu mavzuni chuqur o‘rganish o‘quvchilarga keyingi geometrik bilimlarni muvaffaqiyatli o‘zlashtirish imkonini beradi.

1- §. Aylana va uning asosiy elementlari

1 -T a’r i f. Tekislikning berilgan nuqtadan bir xil uzoqlikda yotgan nuqtalari to‘plami *aylana* deb ataladi.

Berilgan nuqta aylananing *markazi* deyiladi. Markazni aylananing biror nuqtasi bilan birlashtiruvchi kesma aylananing *radiusi* deyiladi. Bu kesmaning uzunligi ham *radius* deb ataladi va aylananing nuqtalari uning markazidan qanday masofada joylashganligini ko‘rsatadi. Aylananing ikkita A, B nuqtasini tutashtiruvchi AB kesma aylananing *vatori* deyiladi (5.1- chizma). Aylananing markazidan o‘tuvchi AC vatar *diametr* deyiladi.

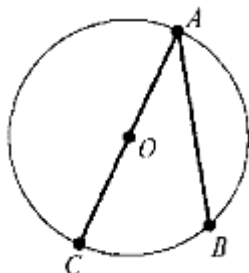
Aylana o‘zi joylashgan tekislikni ikkita — ichki va tashqi sohalarga ajratadi. Agar R — aylananing radiusi bo‘lsa, tashqi sohadagi ixtiyoriy K nuqta uchun $OK > R$ tengsizlik, agar F ichki sohaning nuqtasi bo‘lsa, $OF < R$ tengsizlik bajariladi.

2 -T a ' r i f .Tekislikning berilgan O nuqtadan berilgan R sonidan katta bo'lmagan masofada joylashgan nuqtalari to'plami R radiusli *doira* deyiladi.

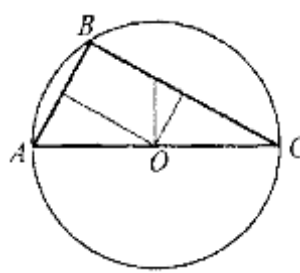
R radiusli doiraning ixtiyoriy F nuqtasi uchun $OF \leq R$ tengsizlik bajariladi. Bundan R radiusli aylana doiraning chegarasidan iborat ekanligi kelib chiqadi.

1 - t e o r e m a . **Bir to 'g'ri chiziqda yotmagan uchta nuqtadan yagona aylana o'tkazish mumkin.**

I s b o t i . A, B, C nuqtalar bir to'g'ri chiziqda yotmasin. AC kesmaning A va C uchlaridan teng uzoqlikda joylashgan nuqtalar



1- chizma



2- chizma

to'plami AC kesmaga o'tkazilgan o'rta perpendikularlarda yotadi (5.2-chizma).

Shunga o'xshash, A va B nuqtalardan teng uzoqlikda joylashgan nuqtalar AB kesmaga o'rta perpendikularlarda yotadi, B va C nuqtalardan teng uzoqlikda joylashgan nuqtalar BC kesmaga o'rta perpendikularlarda yotadi. U vaqtda bu o'rta perpendikularlar kesishadigan O nuqta A, B va C nuqtalarning barchasidan teng uzoqlikda joylashgandir va, demak, ulardan o'tuvchi aylananing markazidan iborat. Barcha o'rta perpendikularlar bitta nuqtada kesishganligidan, aylana yagona bo'ladi.

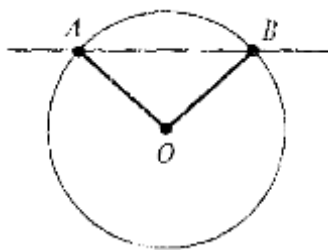
2- §. Markaziy va ichki chizilgan burchaklar

1. Markaziy burchaklar. Berilgan aylananing ikkita A va B nuqtasidan AB to'g'ri chiziqli o'tkazamiz (5.3- chizma). Bu to'g'ri chiziqli tekislikni ikkita yarim tekislikka ajratadi. Aylananing bu yarim tekisliklarda yotuvchi qismlari uning *yoylari* deyiladi. Agar AB diametrdan iborat bo'lsa, aylananing yoylari *yarim aylanalar* deyiladi.

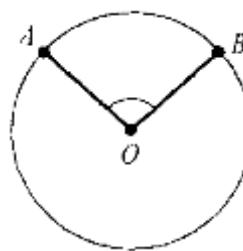
Agar AB diametr bo'lmasa, aylananing markazi yarim tekisliklardan biriga tegishli bo'ladi. Aylananing ana shu yarim tekislikka tegishli yoyi *yarim aylanadan kattayoy* deb ataladi. Boshqa yoy esa *yarim aylanadan kichik yoy* deyiladi. Agar aylananing O markazini kichik yoyning nuqtalari bilan tutashtirsak, bu radiuslar AB vatarini kesib o'tadi. Agar O markazni katta yoyning nuqtalari bilan tutashtirsak, bu radiuslar AB vatar bilan kesishmaydi.

3 - t a ' r i f . Uchi aylananing markazida yotgan burchak uning *markaziy burchagi* deyiladi.

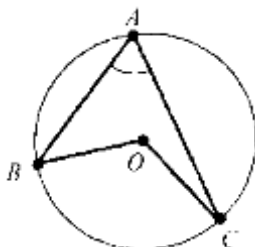
Ravshanki, aylanada olingan ikkita A va B nuqta aylananing O markazi bilan birga ikkita markaziy burchakni aniqlaydi. Agar



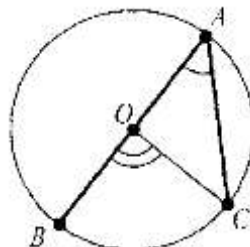
3- chizma



4- chizma



5- chizma



6- chizma

$\angle AOB$ yoyiq burchak bo'lmasa, yoylardan biri yarim aylanadan kichik, boshqasi esa yarim aylanadan katta bo'ladi (5.4- chizma). Agar $\overset{\frown}{AB}$ yoy yarim aylanadan kichik bo'lsa, Lining gradus o'lchovi markaziy AOB burchakning gradus o'lchoviga teng deb hisoblanadi. Agar $\overset{\frown}{AB}$ yoy yarim aylanadan katta bo'lsa, uning gradus o'lchovi $360^\circ - \angle AOB$, bunda $\angle AOB < 180^\circ$ ifodaga teng deb hisoblanadi. Bu yerdan aylananing umumiy uchlarga ega bo'lgan ikkita yoyining gradus o'lchovlari yig'indisi 360° ga teng bo'lishi kelib chiqadi.

2. Ichki chizilgan burchaklar.

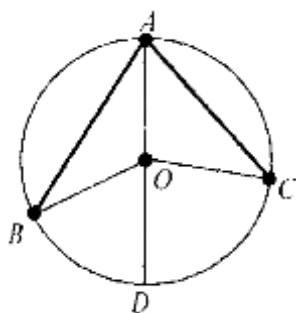
4- ta'rif. Agar BAC burchakning A uchi aylanada yotib, uning AB va AC tomonlari esa aylananing vatarlaridan iborat bo'lsa (5.5- chizma), burchak aylanaga *ichki chizilgan* deyiladi. Burchakning tomonlari orasida joylashgan $\overset{\frown}{BC}$ berilgan *ichki chizilgan burchakka mos yoy* deyiladi. Agar B va C nuqtalarni aylananing markazi O nuqta bilan tutashtirsak, BOC markaziy burchak berilgan BAC *ichki chizilgan burchakka mos burchak* deyiladi.

2 - teorema. **Aylanaga ichki chizilgan burchak o'zi tortib turgan yoyning yarmi bilan o'lchanadi.**

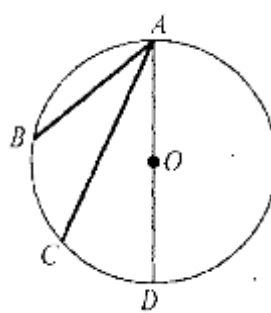
I s b o t i. Uch hoi bo'lishi mumkin.

Aylanaga ichki chizilgan BAC burchakning tomonlaridan biri, masalan, AB tomoni aylananing diametridan iborat bo'lsin (5.6- chizma). Aylananing O markazini C nuqta bilan birlashtirib, teng yonli $\triangle AOC$ ni hosil qilamiz, unda $OA = OC$. Natijada hosil qilingan markaziy BOC burchak $\triangle AOC$ uchun tashqi burchak bo'ladi va burchak tashqi burchagining xossasiga ko'ra munosabatni $\angle BOC = \angle OAC + \angle OCA = 2\angle OAC$

Bundan, talab qilingan munosabatni olamiz.



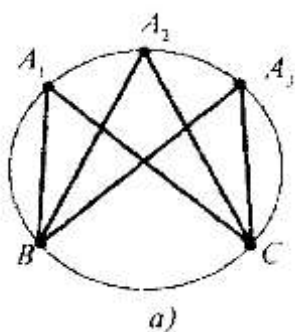
7- chizma



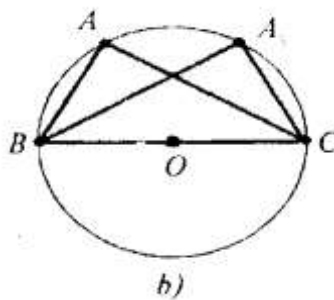
8- chizma

1- n a t i j a . Bitta yoyga tiralgan ichki chizilgan burchaklar o'zaro teng (5.9- a chizma), ya'ni $\angle BA_1C = \angle BA_2C = \angle BA_3C$

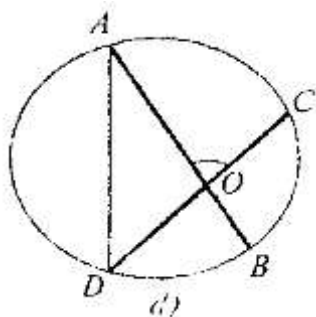
2- n a t i j a . Diametrga tiralgan ichki chizilgan burchaklar to'g'ri burchakdan iborat (5.9- b chizma), ya'ni $\angle BA_1C = \angle BA_2C = 90^\circ$



a)



b)



c)

9-chizma

3-teorema. **Ikkita o'zaro kesishadigan vatar hosil qilgan burchak vatarlarning uchlari orasida joylashgan yoylar yig'indisining yarmiga teng, ya'ni agar AB va CD vatarlar O nuqtada kesishsa** (9- d chizma), $\angle AOC = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BD})$

I s b o t i . Aylanadagi A va D nuqtalarni tutashtirib, $\triangle AOD$ ni hosil qilamiz. $\angle AOC$ burchak $\triangle AOD$ uchun tashqi burchak bo'ladi va shuning uchun $\angle AOC = \angle OAD + \angle ADO$

Lekin $\angle OAD = \angle BAD$ aylanaga ichki chizilgan burchakdan iborat va isbotlanganiga ko'ra

$$\angle OAD = \frac{1}{2} \overset{\frown}{BD}$$

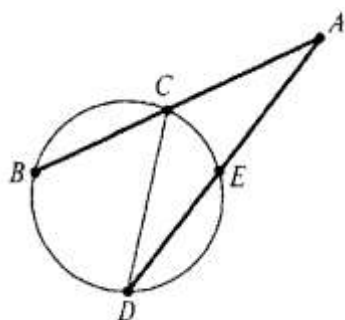
Xuddi shunga o'xshash, ichki chizilgan $\triangle ADO$ uchun $\angle ADO = \angle ADC = \frac{1}{2} \overset{\circ}{\angle} AC$ bo'ladi.

Shunday qilib, isbotlanishi talab qilingan, $\angle AOC = \frac{1}{2} \overset{\circ}{\angle} BD + \frac{1}{2} \overset{\circ}{\angle} AC = \frac{1}{2} (\overset{\circ}{\angle} BD + \overset{\circ}{\angle} AC)$

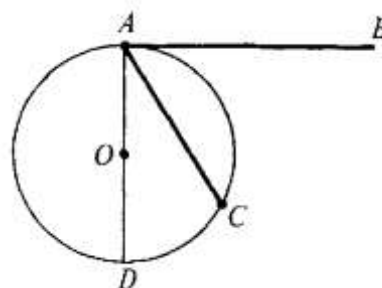
munosabatni olamiz. Teorema isbotlandi.

4 - t e o r e m a . *Aylanaga o'tkazilgan ikkita kesuvchi orasidagi burchak aylananing berilgan kesuvchilar orasida yolg'an yoylari ayirmasining yarmiga teng, ya'ni agar AB va AD kesuvchilar aylanani B, C va E, D nuqtalarda kesib o'tsa (5.10- chizma),*

$$\angle BAD = \frac{1}{2} (\overset{\circ}{\angle} BD + \overset{\circ}{\angle} CE)$$



10- chizma



11- chizma

I s b o t i . Aylanadagi C va D nuqtalarni tutashtirib, $\triangle ACD$ ni hosil qilamiz. $\angle BCD$ burchak $\triangle ACD$ uchun tashqi burchak bo'ladi shuning uchun, $\angle BCD = \angle CAD + \angle CDA$, bundan $\angle BAD = \angle CAD = \angle BCD - \angle CDA$ munosabatni hosil qilamiz. Lekin $\angle BCD$ va $\angle CDE$ burchaklar ichki chizilgan burchaklardir va shu sababli, isbotlanganiga ko'ra,

$$\angle BCD = \frac{1}{2} \overset{\circ}{\angle} BD, \angle CDE = \angle CDA = \frac{1}{2} \overset{\circ}{\angle} CE$$

bo'ladi. Oxirgi munosabatlardan talab qilingan $\angle BCD = \frac{1}{2} \overset{\circ}{\angle} BD - \frac{1}{2} \overset{\circ}{\angle} CE = \frac{1}{2} (\overset{\circ}{\angle} BD - \overset{\circ}{\angle} CE)$

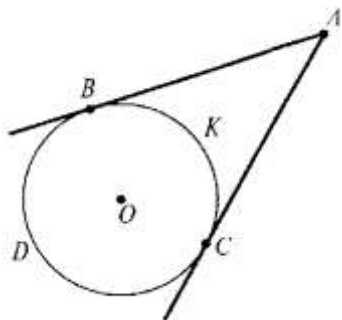
tenglikni olamiz. Teorema isbotlandi.

5- teorema. *Aylanaga o'tkazilgan urinma va vatar orasidagi burchak, ular orasidagi yoyning yarmiga teng, ya'ni agar AB — aylanaga urinma, AC — uning vatari bo'lsa (11- chizma), $\angle BAC = \frac{1}{2} \overset{\circ}{\angle} AC$*

I s b o t i . Aylanada AD diametr o'tkazamiz. Urinish nuqtasiga o'tkazilgan radiusning xossasidan $\angle BAD = 90^\circ$ bo'lishi kelib chiqadi. $\angle DAC$ burchak aylanaga ichki chizilgan bo'lganligidan, $\angle DAC = \frac{1}{2} \overset{\circ}{\angle} DC$

U holda $\angle BAC = \angle BAD - \angle DAC = 90^\circ - \frac{1}{2} \overset{\frown}{DC} = \frac{1}{2} \overset{\frown}{DA} - \frac{1}{2} \overset{\frown}{DC}$

bo'ladi va talab qilingan $\angle BAC = \frac{1}{2} (\overset{\frown}{DA} - \overset{\frown}{DC}) = \frac{1}{2} \overset{\frown}{AC}$ Teorema isbotlandi.



12- chizma

4- ta'rif. Berilgan bitta nuqtadan aylanaga o'tkazilgan ikkita urinma tashkil etgan burchak aylanaga *tashqi chizilgan burchak* deyiladi.

6- teorema. **Tashqi chizilgan burchak urinish nuqtalari orasida joylashgan yoylar ayirmalarining yarmiga teng, ya'ni agar AB va AC aylanaga A nuqtadan o'tkazilgan urinmalar bo'lsa** (12- chizma), $\angle BAC = \frac{1}{2} (\overset{\frown}{BDC} - \overset{\frown}{BKC})$

3- §. Doiradagi metrik munosabatlar

7- teorema. **Doira ichidagi nuqtadan o'tkazilgan hamma vatarlar uchun, har bir vatar kesmalarining ko'paytmasi o'zgarmas miqdordir.**

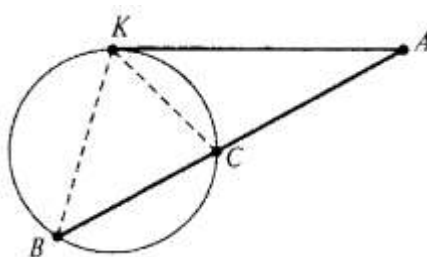
Isboti. Aylananing AB va CD vatarlari K nuqtada kesishgan bo'lsin (5.13- chizma). A va C, B va D nuqtalarni tutashtirib, ikkita, $\triangle ACK$ va $\triangle BDK$ ni hosil qilamiz. Bu uchburchaklarda vertikal burchaklar sifatida $\angle AKC = \angle BDK$

hamda bitta AD yoyga tirilgan ichki chizilgan burchaklar sifatida

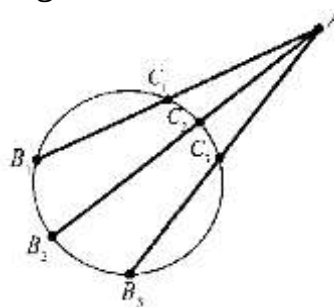
$\angle ACK = \angle KBD$ yoki $\angle ACD = \angle ABD$ bo'ladi.

Demak, ikkita teng burchagi bo'yicha $\triangle ACK \sim \triangle BDK$. Bu uchburchaklar mos tomonlarining nisbatini tuzamiz: $\frac{AK}{CK} = \frac{KD}{BK}$

bu yerdan $AK \cdot BK = CK \cdot KD$, talab qilingan tenglik olindi. Teorema isbotlandi.



13- chizma



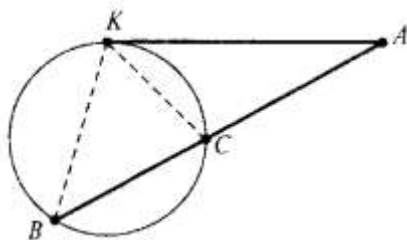
14- chizma

3- natija. Agar doira ichidagi nuqtadan vatar va diametr o'tkazilgan bo'lsa, vatar kesmalarining ko'paytmasi diametr kesmalarining ko'paytmasiga teng bo'ladi, ya'ni agar AB diametr va CD vatar K nuqtada kesishgan bo'lsa (14-chizma),

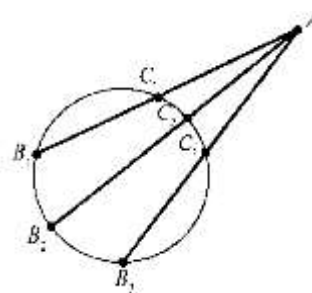
$$AK \cdot KB = CK \cdot KD \quad \text{tenglik o'rinli.}$$

8- teorema. *Aylanadan tashqarida yotgan nuqtadan aylanaga kesuvchi va urinma o'tkazilgan bo'lsa, urinma kesmasining kvadrati kesuvchining uning tashqi qismiga ko'paytmasiga teng, ya'ni agar AK — aylanaga urinmaning kesmasi va AB — shu aylananing kesuvchisi bo'lsa* (15- chizma), $AK^2 = AB \cdot AC$.

Isboti. Berilgan A nuqtadan aylanaga urinish nuqtasi K gacha bo'lgan kesma AK , AB aylanani kesuvchi, AC esa kesuvchining tashqi qismi bo'lsin. K va C , K va B nuqtalarni tutashtirib, $\triangle AKC$ va $\triangle AKB$ ni hosil qilamiz. Bu uchburchaklar o'xshash uchburchaklardir, $\triangle AKC \sim \triangle AKB$, chunki $\angle A$ - ularning har ikkisi uchun umumiy hamda $\angle AKC = \angle ABK = \frac{1}{2} \overset{\circ}{\angle C}$. O'xshash uchburchaklarda mos tomonlar nisbatini tuzamiz



15- chizma



16- chizma

$$\frac{AK}{AC} = \frac{AB}{AK} \quad \text{Oxirgi tenglikdan, talab qilingan, } AK^2 = AB \cdot AC \text{ Teorema isbotlandi.}$$

4 - n a t i j a . Agar aylanadan tashqarida yotgan nuqtadan unga kesuvchilar o'tkazilgan bo'lsa, har bir kesuvchi uzunligining uning tashqi qismi uzunligiga ko'paytmasi berilgan aylana uchun o'zgarmas miqdordan iborat (16- chizma):

$$AB_1 \cdot AC_1 = AB_2 \cdot AC_2 = AB_3 \cdot AC_3 .$$

4- §. Aylana uzunligi

Aylananing uzunligini chizg'ich yordamida kesmaning uzunligi kabi o'lchashimiz mumkin emas. Uni, sirkul yordamida, qismlarini ketma-ket o'lchashlar bajarib, o'lchash mumkin. Bu jarayonning har bir qadamida egri chiziqli uzunligi aylana uzunligining taqribiy qiymatini beradigan sinuqlik chiziqli uzunligi bilan almashtiriladi. Aylana uzunligini o'lchash qozonlar, porshenlar, quvurlarni yasash va h.k. bilan bog'liq ko'plab amaliy masalalarda uchraydi. Shu sababli, aylana uzunligini hisoblash uchun formulani keltirib chiqarishga harakat qilamiz. Avvalo berilgan aylanaga muntazam

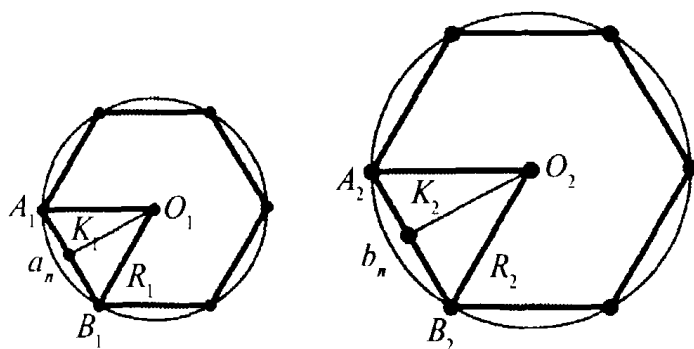
o'n burchakni, so'ngra muntazam yigirmaburchakni, qirq burchakni va h.q. ichki chizamiz. Ravshanki, bu ko'pburchaklarning tomonlari soni qancha ko'p bo'lsa, ularning $P_{10}, P_{20}, P_{40}, \dots$ perimetrlari aylana uzunligiga shuncha yaqinroq bo'ladi. Shu sababli, *aylana uzunligi aylanaga ichki chizilgan muntazam ko'pburchaklarning perimetrlari, ularning tomonlari soni cheksiz ortganda, intiladigan limitga teng deb qabul qilingan.*

9 - teorema. Aylana uzunligining uning diametriga nisbati aylana diametriga bog'liq emas.

Isboti. Radiuslari R_1 va R_2 , uzunliklari C_1 va C_2 bo'lgan ikkita aylana berilgan bo'lsin (17- chizma). Bu aylanalariga tomonlari soni bir xil — n ta bo'lgan muntazam n - burchaklarni ichki chizamiz. Ichki chizilgan muntazam n - burchaklarning tomonlari, mos ravishda, a_n va b_n , ularning perimetrlari esa P_n va P'_n bo'lsin. Dastlab a_n ni topish formulasini keltirib chiqaramiz. Agar O_1 birinchi aylananing markazi, $A_1B_1 = a_n$ uning tomoni bo'lsa, $\triangle A_1O_1B_1$ da $\angle A_1O_1B_1$ markaziy burchak bo'ladi va uning kattaligi $\frac{360^\circ}{n}$

ga teng, ya'ni $\triangle A_1O_1B_1 = \frac{360^\circ}{n}$. Teng yonli $\triangle A_1O_1B_1$ ning O_1K_1 balandligini o'tkazamiz.

$$\angle A_1O_1K_1 = \frac{1}{2} \angle A_1O_1B_1 = \frac{180^\circ}{n}$$



17-chizma

To'g'ri burchakli $A_1O_1K_1$ dan $\frac{a_n}{2} = R_1 \sin \frac{180^\circ}{n}$ va $a_n = 2R_1 \sin \frac{180^\circ}{n}$

bo'lishi kelib chiqadi. Shunga o'xshash, ikkinchi aylanaga ichki chizilgan muntazam n - burchakning tomoni uchun $b_n = 2R_2 \sin \frac{180^\circ}{n}$

bo'lishini olamiz. Endi ko'pburchaklar perimetrlarini hisoblaymiz:

$$P_n = n \cdot a_n = n \cdot 2R_1 \sin \frac{180^\circ}{n}, \quad P'_n = n \cdot b_n = n \cdot 2R_2 \sin \frac{180^\circ}{n}$$

Ma'lumki, o'xshash muntazam ko'pburchaklar perimetrlarining nisbati ular o'xshash tomonlarining nisbati kabi bo'ladi. Shuning uchun d_1 va d_2 — berilgan aylanalarning diametrlari bo'lganda, $\frac{P_n}{P'_n} = \frac{2R_1}{2R_2} = \frac{d_1}{d_2}$ deb yozish mumkin.

Agar n sonni cheksiz orttirib borsak, ichki chizilgan muntazam ko'pburchaklarning P_n va P'_n perimetrlari mos aylanalarning C_1 va C_2 uzunliklariga intiladi. Shunday qilib,

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{d_1}{d_2},$$

bundan talab qilingan tenglik kelib chiqadi. Teorema isbotlandi.

Aylana uzunligining uning diametriga nisbati yunoncha π (“pi”) harfi bilan belgilanadi. π soni irratsional son bo'lib, $\pi \approx 3,1416\dots$ ga teng. agar C aylana uzunligi, R uning radiusi bo'lsa, $\frac{C}{2R} = \pi$, bundan $C = 2\pi R$

bo'lishi kelib chiqadi. Demak, *aylananing uzunligi uning radiusiga proporsional ekan.*

Aylana yoyining uzunligi bu yoy o'lchoviga, ya'ni unga mos markaziy burchakning o'lchoviga proporsionaldir. Agar $2\pi R$ ni 360° ga bo'lsak, 1° li yoyning uzunligini topamiz. Demak, α gradusli yoyning L uzunligi $L = \frac{2\pi R}{360^\circ} \alpha = \frac{\pi R}{180^\circ} \alpha$ bo'ladi.

Tarixiy ma'lumotlar.

Axmes papirusida (miloddan avvalgi 1700 yil atrofi) π soni uchun quyidagi qiymat berilgan: $n \approx 3,1605$.

Arximed (miloddan avvalgi 287 — 212- yillar) π soni uchun $\pi \approx 3\frac{1}{7} \approx 3,14$ qiymatni ishlatgan.

Hind matematigi va astronomi Ariabxata (475- yillar atrofi) $\pi \approx 3,146$ qiymat bilan ish ko'rgan.

Ulug'bek observatoriyasida ish olib borgan Jamshid G'iyosiddin al-Koshiy 1424-yilda o'zining „Aylana uzunligi haqidagi kitob“ ida π soni uchun 16 ta raqam aniqligida qiymatni beradi: $\pi \approx 3,1415826535897932$.

Yevropada al-Koshiyning ishi ma'lum bo'lmagan. Faqat XVI asrda (1597- y.). Van Romen π ning qiymatlarini 17 ta raqam aniqligida topgan. π belgining o'zini XVIII asrda buyuk matematik Leonard Eyler (1707— 1783- yillar) kiritgan bo'lib, u π son uchun 153 ta to'g'ri raqamli yaqinlashishni bergan.

5- §. Doira va uning qismlari yuzi

Doira aylana bilan, ya'ni egri chiziq bilan chegaralangan. Shu sababli doira yuzini hisoblash uchun aylana uzunligini topishda foydalanilgan usulni qo'llaymiz. Avvalo doiraga muntazam ichki n burchakni chizamiz, so'ngra ko'pburchak tomonlarini ketma-

ket ikkilantirib boramiz. Ko'pburchaklar ichki chizilgan bo'lganligidan, ularning yuzlari doira yuzidan kichik bo'ladi.

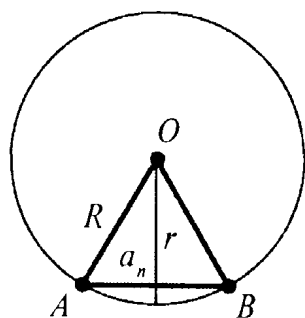
Lekin ko'pburchak tomonlari sonining ortib borishi bilan uning S_k yuzi doiraning S_d yuziga intiladi.

4 - t a ' r i f . *Doiraning yuzi deb, berilgan aylanaga ichki chizilgan muntazam ko'pburchak tomonlari sonini cheksiz orttirilganda, ko'pburchak yuzining limiti bo'lgan miqdorga aytiladi.*

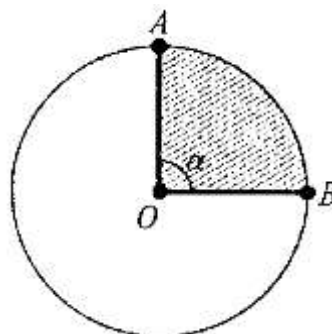
10 - t e o r e m a . *R radiusli doiraning yuzi $S = \pi R^2$ formula bo'yicha hisoblanadi, bunda π — aylana uzunligining uning diametriga nisbatidir.*

I s b o t i . $AB = a_n$ aylanaga ichki chizilgan muntazam n -burchakning tomoni bo'lsin (5.18- chizma). Tomonning A va B uchlarini aylananing O markazi bilan tutashtirib, teng yonli $\triangle AOB$ ni hosil qilamiz. Bu uchburchakning O uchidan tushirilgan balandligini r deb belgilaymiz. U vaqtda $\triangle AOB$ ning yuzi $S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} a_n r$, ichki chizilgan muntazam ko'pburchakning (n - burchakning) yuzi esa $S_k = n \frac{1}{2} a_n r = \frac{1}{2} P_k a_n$

bo'ladi. Ichki chizilgan ko'pburchak tomonlari sonini cheksiz orttirilganda uning P_k perimetri chegaralovchi aylananing $C = 2\pi R$



18- chizma



19- chizma

uzunligiga, uchburchakning r balandligi esa aylananing R radiusiga intiladi.

Shining uchun doiraning yuzini hisoblash formulasi $S = \frac{1}{2} 2\pi R \cdot R$ yoki $S = \pi R^2$

Teorema isbotlandi.

Endi burchagining kattaligi α bo'lgan AOB doiraviy sektorning yuzini topamiz (5.19- chizma). Doiraning yuzini 360° ga bo'lib, burchak kattaligi 1° bo'lgan sektorning yuzini topamiz. U vaqtda burchak kattaligi α gradus bo'lgan sektorning yuzi

$$S_{sek} = \frac{\pi R^2}{360^\circ} \alpha$$

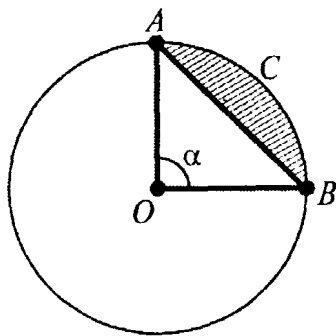
formula bo'yicha hisoblanishi kelib chiqadi.

Nihoyat, ACB doiraviy segment yuzini hisoblash uchun (5.20-chizma), AOB doiraviy sektorning yuzini hisoblash va bu miqdordan teng yonli $\triangle AOB$ yuzini ayirish

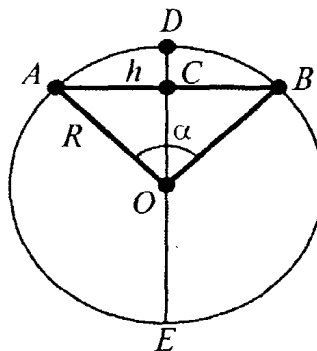
yetarli. Doiraning radiusi R , markaziy $\angle AOB$ ning kattaligi α bo'lsin. U holda doiraviy segmentning yuzini hisoblash formulasi $S_{\text{segm}} = \frac{\pi R^2}{360} \alpha - \frac{1}{2} R^2 \sin \alpha$ ko'rinishda bo'ladi.

Tarixiy ma'lumot.

Segmentning yuzini hisoblashda Muhammad al-Xorazmiy tomonidan qanday ish ko'rilganligini qarab chiqamiz. Markazi O nuqtada, radiusi R ga teng aylanada AB vatar o'tkazilgan bo'lib, uning markaziy burchagi (21- chizma)



20- chizma



21- chizma

$\angle AOB = \alpha < \pi$ bo'lsin. U holda $\overset{\frown}{ADB}$ yoy va $OA = OB = R$ radiuslar bilan chegaralangan, balandligi $DC = h$ bo'lgan doiraviy segmentning yuzi

$$S_{\text{segm}} = \left(\frac{DE}{2} \right)^2 \frac{\alpha}{2} - \left(\frac{DE}{2} - DC \right) \frac{AB}{2}$$

formula bo'yicha hisoblanadi.

Agar markaziy burchakning kattaligi $\alpha > \pi$ bo'lsa, doiraviy segmentning yuzi

$$S_{\text{segm}} = \left(\frac{DE}{2} \right)^2 \frac{\alpha}{2} - \left(CE - \frac{DE}{2} \right) \frac{AB}{2} \quad \text{yoki} \quad S_{\text{segm}} = R^2 \frac{\alpha}{2} + (h - R) \frac{\alpha}{2}$$

formula bo'yicha hisoblanadi.

6- §. Aylana tenglamasi

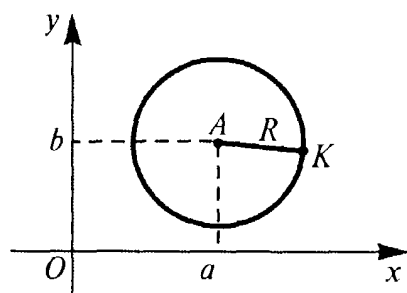
Tekislikda to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasi berilgan bo'lsin. Aylana tenglamasini: 1) aylananing markazi $A(a; b)$ nuqtada, 2) aylananing radiusi R ekanligi ma'lum bo'lganda, tuzamiz (22- chizma). Aylanada ixtiyoriy K nuqtani olamiz va uning koordinatalarini $(x; y)$ deb belgilaymiz. Aylananing ta'rifiga ko'ra, aylananing ixtiyoriy $K(x; y)$ nuqtasi uchun $AK = R$ tenglik bajariladi. A va K nuqtalar orasidagi masofani ularning koordinatalari orqali ifodalasak, aylananing tenglamasini

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R$$

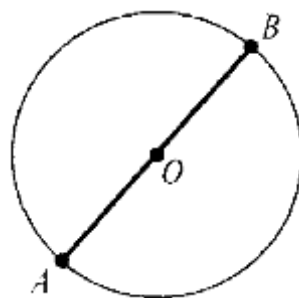
ko'rinishda olamiz. Bu tenglikning har ikki tomonini kvadratga ko'tarib, aylana tenglamasini

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

ko'rinishda yozamiz. (1) tenglama aylananing kanonik tenglamasi deyiladi.



22- chizma



23- chizma

Agar aylananing markazi koordinatalar sistemasining boshi bilan ustma-ust tushsa, tenglama $x^2+y^2=R^2$ ko'rinishni oladi.

1 - m a s a l a . Agar aylana diametri AB ning uchlari koordinatalari A(-4; 2), B(6; 8) bo'lsa aylana tenglamasi tuzilsin (23- chizma).

Y e c h i l i s h i . Kesmani teng ikkiga bo'lish formulalaridan aylana markazining koordinatalarini topamiz: $a = \frac{-4+6}{2} = 1$, $b = \frac{2+8}{2} = 5$.

So'ngra aylananing radiusini topamiz: $R = \sqrt{(6-1)^2 + (8-2)^2} = \sqrt{34}$

Demak, bu holda aylana uchun tenglama $(x-1)^2+(y-5)^2 = 34$ ko'rinishni oladi.

Xulosa

Aylana va doira geometriyaning eng muhim tushunchalaridan biri hisoblanadi. Ushbu mavzuni puxta o'zlashtirish o'quvchilarning mantiqiy fikrlashini, fazoviy tasavvurini va matematik savodxonligini rivojlantiradi. Akademik litseylarda mavzuni zamonaviy pedagogik texnologiyalar asosida o'qitish ta'lim samaradorligini oshiradi hamda o'quvchilarning fanlarga bo'lgan qiziqishini kuchaytiradi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Geometriya Isroilov . Pashayrv Akademik litsey va kasb-hunar kollejlari uchun darslik.
2. Sh.A. Alixonov. Geometriya kursi.
3. A. G'ulomov. Matematika o'qitish metodikasi.
4. N. Vohidov. Geometriya masalalari to'plami.
5. O'zbekiston Respublikasi Ta'lim to'g'risidagi Qonuni.
6. Zamonaviy pedagogik texnologiyalar bo'yicha ilmiy manbalar.
7. Geometriya fanidan o'quv dasturlari va metodik qo'llanmalar.