

GILBERT FAZOSIDA O`Z-O`ZIGA QO`SHMA OPERATORLAR VA ULARNING XOSSALARI.

Xolmatov Qahramon Xolmurotboy o`g`li

Mirzaobod ixtisoslashtirilgan maktabi

matematika fani o`qituvchisi

e-mail: qahramonxolmatov672@gmail.com

Annotatsiya. Maqolada Gilbert fazosida o`z-o`ziga qo`shma operatorlar va ularning asosiy xossalari o`rganilgan. Gilbert fazosi va Gilbert qo`shmasi tushunchalari, shuningdek chegaralangan va chegaralanmagan operatorlarning ta`rifi hamda ularning spektral va strukturaviy xususiyatlari yoritilgan. Nazariy qismni mustahkamlash uchun ularga oid misollar keltirilgan.

**Kalit so`zlar:** Gilbert fazosi, Gilbert qo`shmasi, o`z-o`ziga qo`shma operator, chegaralangan operator, chegaralanmagan operator, spektr.

Faraz qilamiz, H_1, H_2 lar Gilbert fazolari bo`lsin.

Ta`rif 1.1.4.** Agar  $A: H_1 \rightarrow H_2$  operator  $H_1$  dagi istalgan chegaralangan to`plamni H_2 dagi chegaralangan to`plamga o`tkazsa, u **chegaralangan operator deyiladi.

Demak chegaralanmagan operator biror chegaralangan to`plamni chegaralanmagan to`plamga o`tkazadi. Chiziqli operatorlar uchun chegaralanganlik ta`rifini quyidagicha ham berish mumkin:

**Ta`rif 1.1.5.**  $H_1$  va  $H_2$  Gilbert fazolari va  $A: H_1 \rightarrow H_2$  chiziqli operator bo`lsin. Agar biror $M > 0$ son va istalgan $x \in H_1$ uchun

$$\|Ax\|_{H_2} \leq M \|x\|_{H_1}$$

tengsizlik bajarilsa, A **chegaralangan operator** deyiladi. Agar istalgan M soni uchun shunday $x_M \in H_1$ element mavjud bo`lib,  $\|Ax_M\|_{H_2} > M \|x_M\|_{H_1}$  munosabat o`rinli bo`lsa, A **chegaralanmagan operator** deyiladi.

Agar A operator chegaralanmagan bo`lsa, uning normasi ∞ ga teng deb qabul qilamiz.

Ta'rif 1.2.1. H Gilbert fazosida aniqlangan chegaralangan T operator va $\forall x, y \in H$ uchun

$$(Tx, y) = (x, T^*y)$$

tenglikni qanoatlantiruvchi T^* operator T operatorning **Gilbert qo'shmasi** deyiladi. Bundan buyon operatorning qo'shmasi deganda uning Gilbert qo'shmasini tushunamiz.

Agar $T = T^*$ shart bajarilsa, T operator o'z-o'ziga qo'shma operator deyiladi.

Lemma 1.2.1 $A: H \rightarrow H$, $B: H \rightarrow H$ operatorlar berilgan bo'lsin. Agar barcha $x, y \in H$ lar uchun $(Ax, y) = (Bx, y)$ tenglik bajarilsa, u holda $A = B$ bo'ladi.

Teorema 1. A chiziqli operatorning qo'shmasi ham chiziqlidir.

Teorema 2. $T: H \rightarrow H$ operatorning qo'shmasi mavjud bo'lishi uchun uning aniqlanish sohasi $D(T)$ butun fazo H da zich bo'lishi zarur va yetarli. Agar bu shart bajarilsa, T^* operator quyidagicha aniqlanadi: $y \in H$ element T^* ning aniqlanish sohasiga tegishli bo'lishi uchun shunday $y^* \in H$ mavjud bo'lib istalgan $x \in D(T)$ uchun

$$(Tx, y) = (x, y^*)$$

tenglik bajarilishi yetarli va zarur. Bu holda $T^*y = y^*$.

Misol 2.1. Yuqorida qaralgan ushbu operatorning qo'shmasini topamiz:

$$A: \ell_2(\mathbb{Z}^d) \rightarrow \ell_2(\mathbb{Z}^d), \quad (A\hat{f})(n) = \hat{v}(n)\hat{f}(n),$$

bunda $\hat{v}$ funksiya $\mathbb{Z}^d$ da chegaralangan.

$$\begin{aligned} (A\hat{f}, \hat{g}) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} (A\hat{f})(n) \overline{\hat{g}(n)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \hat{v}(n) \hat{f}(n) \overline{\hat{g}(n)} = \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \hat{f}(n) \overline{\hat{v}(n) \hat{g}(n)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \hat{f}(n) \overline{(A^* \hat{g})(n)} = (\hat{f}, A^* \hat{g}) \end{aligned}$$

munosabatlarga va oldingi teoremaga asosan $(A^* \hat{f})(n) = \overline{\hat{v}(n)} \hat{f}(n)$ kabi aniqlanadi.

$\hat{v}$ chegaralangan funksiya ekanidan, $D(A) = \ell_2(\mathbb{Z}^d)$. U holda esa

$$D(A^*) = \ell_2(\mathbb{Z}^d).$$

Ushbu misollardagi qo'shma operatorlarning aniqlanishi ham 1 teoreмага asoslanadi.

Misol**1.**

$$A: L_2(\mathbb{T}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{T}^d), (Af)(x) = \varepsilon(x)f(x), f \in L_2(\mathbb{T}^d)$$

operatorni qaraymiz, bunda $\varepsilon(x) \in L_2(\mathbb{T}^d)$ chegaralangan funksiya. Bu operatorning qo'shmasi $(A^*f)(x) = \overline{\varepsilon(x)}f(x)$.

Misol 2.

$$A: L_2(\mathbb{T}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{T}^d), (Af)(x) = \int_{\mathbb{T}^d} K(x, y)f(y), f \in L_2(\mathbb{T}^d)$$

integral operatorning qo'shmasi ham integral operator bo'ladi:

$$(A^*f)(x) = \int_{\mathbb{T}^d} \overline{K(y, x)}f(y),$$

bu yerda $K(x, y)$ funksiya $(\mathbb{T}^d)^2$ da aniqlangan biror chegaralangan uzluksiz funksiya.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. M.I.Mo'minov, C.Lokman Finiteness of discrete spectrum of the two-particle Schödinger operator on diamond lattices. Nanosystems; physics, chemistry mathematics, 2017, 8(3), P. 310-316.

2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. Москва: Наука. 1989.

3. O'Ktanova, S., & Usmonov, N. M. (2025). Gilbert fazosida chiziqli chegaralangan operatorlar. Экономика и социум, (7-1 (134)), 992-996.

4. Usmonov, N. M., & Usmonov, A. A. (2025). Gilbert fazosining asosiy xossalari va uning turli masalalarga tadbiqu. Экономика и социум, (6-2 (133)), 2080-2084.

5. Usmonov, N. M. (2024). Maple paketi orqali oddiy va xususiy hosilali differensial tenglamalarini yechish. Экономика и социум, (12-2 (127)), 928-935.

6. Муминов М.Э., А.М. Хуррамов А.М. Спектральные свойства двухчастичного гамильтониана на одномерный решетке // Уфимск. матем. журн. 2014. Т. 177, №. 4. С. 102–110.

7. Муминов М.Э. О положительности двухчастичного гамильтониана на решетке // Теор. Мат. Физика. 2007. Т.153, №. 3. С. 381–387.
8. Usmonov, N. M. (2022). Kompleks argumentli trigonometrik va giperbolik funksiyalar. *Вестник магистратуры*, (6-3 (129)), 4-6.
9. Muminov M. I., Usmonov N. M. Approximate solution of boundary value problem for linear second-order differential equations //Advanced Mathematical Models & Applications. – 2026. – Т. 11. – №. 2. – С. 455.
10. Muminov M. I., Usmonov N. M. A Computational Approach to Solving Second-Order Nonlinear Systems of Differential Equations by Using Piecewise Constant Argument Methods //UiTM International Conference on Mathematical Sciences. – Singapore : Springer Nature Singapore, 2024. – С. 85-101.