

KOMPLEKS SONLAR MAYDONINING KENGAYTMALARI HAQIDA TUSHUNCHA

Saidov Asqar Hayitnazarovich

Buxoro davlat texnika universiteti akademik litseyi

Matematika fani o'qituvchisi

Annotatsiya. Ushbu maqolada kompleks sonlar maydonining kengaytmalari haqida qisqacha bayon qilingan bo'lib, kompleks sonlar haqidagi bilimimizni yanada boyitadi.

Kalit so'zlar. Kompleks sonlar maydoni, matrissa, kvaternionlar jismi

Annotatsion. This article provides a brief overview of extensions of the field of complex numbers, further enriching our knowledge of complex numbers

Keywords. Field of complex numbers, matrix, division ring of quaternions

Kompleks sonlar maydonini keltirib chiqarishda haqiqiy sonlarni son o'qida tasvirlash asosida tekislikning nuqtalar to'plami bilan o'zaro bir qiymatli moslik asosidagi tasdiqdan foydalanamiz.

Shuningdek, kompleks sonlar maydoniga haqiqiy elementli

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d, \in R \right\}$$

ikkinchi tartibli kvadrat matritsalar to'plami orqali ham kelish mumkin. Haqiqatda qo'shish va ko'paytirish amallarini

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{pmatrix} \text{ va}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 + b_1 c_2 & a_1 b_2 + b_1 d_2 \\ c_1 + c_2 + d_1 c_2 & c_1 b_2 + d_1 d_2 \end{pmatrix}$$

deb olib, M ning maydon bo'lishligi ko'rsatiladi va unga izomorf bo'lgan kompleks sonlar maydoni quriladi.

$$\text{Agar } M \text{ ning elementlar } Q = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in C \right\}$$

kompleks sonlar, ya'ni $\alpha = a+bi$, $\beta = c+di$, $\bar{\alpha} = a-bi$, $\bar{\beta} = c-di$ ko'rinishdagi kompleks sonlar bo'lsa, bu to'plam qanday to'plamning shartlarini qanoatlantiradi degan masalani qo'yamiz.

Kompleks sonlarni qo'shish va ko'paytirish amallariga asoslanib,

$$\begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = a+bi+cj+dk$$

ko'rinishdagi sonlar to'plamini hosil qilamiz. Bunday sonlarga kvaternionlar deyiladi. Ularning to'plamiga esa kvaternionlar jismi deyiladi, bu yerda,

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = i, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = j, \quad \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = k$$

bilan belgilaymiz. Ular uchun $i^2=j^2=k^2 = -1$ bo'ladi.

Hosil qilingan kvaternionlar jismi fanda kattta ahamiyatga ega. Undan geometriyada, mexanikada, fizikada keng foydalaniladi. Masalan, kvaternionlar va uch o'lchovli vektorlar orasidagi bog'lanishni quyidagicha ko'rish mumkin.

$$V_1 V_2 = -(\overline{V_1} \overline{V_2}) + [\overline{V_1} \overline{V_2}]$$

bo'lib, birinchi qo'shiluvchi qarama – qarshi ishora bilan olingan skalyar ko'paytmani, ikkinchi qo'shiluvchi esa vektorial ko'paytmani beradi.

Bu esa hozirgi kunda vektroli hisobda keng qo'llaniladi. To'rt bazisli $(1, i, j, k)$ kvaternionlar jismini topishni *Gamilton* topgan. 8 bazisli algebrani *Kele* topgan va unga *Kele* algebrasi deyiladi.

Комплекс сонлар maydonini qurishda

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in R \right\}$$

matritsalar maydonidan foydalanildi. Bundan kompleks sonlar maydonini kengaytirishda foydalanish mumkin. Bu yerda

$$\bar{Q} = \left\{ \left(\frac{\alpha\beta}{-\beta\alpha} \right) \mid a = a + bi, \beta = c + di, \alpha = a - bi, \beta = c - di, a, b, c, d, \in R \right\}.$$

bo'lgan matritsalar to'plamini olib, uning halqa, jism ekanligini ko'rsatadi. Bu jism o'z ichiga kompleks sonlar maydoniga izomorf bo'lgan

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ -c & a \end{pmatrix} \mid a, c \in R \right\} \quad \text{matritsalar maydonini oladi.}$$

Demak, kompleks sonlar maydonini o'z ichiga oluvchi va $\bar{Q}$ da izomorf bo'lgan Q maydon mavjud bo'lib, unga kvaternionlar jismi deyiladi.

$\alpha = a + bi + cj + dk$ ga kvaternion jismi deyiladi.

Bu yerda i, j, k lar mavhum birliklar bo'lib, ularni

$$i \Leftrightarrow \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad j \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad k \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

matritsalariga mos qo'yamiz. U holda $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ bo'ladi.

Kvaternionlar jismi birinchi marta XIX asr o'rtalarida ingliz matematigi *Gamilton* tomonidan kompleks sonlar maydonini kengaytirish orqali topilgan.

Gamilton to'rtta birlik $1, i, j, k$ asosida kvaternionlar jismini yaratgan edi. Kvaternionlar nazariyasini yanada kengaytirish masalasi qo'yilganda *Trobeniys* teoremasidan haqiqiy sonlar maydoni ustida assosiativ – kommutativ algebralarning izomorfizm aniqligida ikkita haqiqiy sonlar maydoni va kompleks sonlar maydoni mavjudligi.

Bunday algebralarning o'lchamlari yanada orttirilsa, u holda nolning bo'luvchilari paydo bo'lar ekan. Shuning uchun noldan farqli elementga bo'lish hamma vaqt ham mumkin bo'lavermaydi.

Endi batafsil Kvaternionlar va ularning tadbiqlari haqida to'xtalib o'tamiz.

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} ab \\ -ba \end{pmatrix} \mid a, b \in R \right\} \text{ matritsalar to'plamini qaraymiz.}$$

Bu to'plamning C – kompleks sonlar maydoniga izomorfligini ko'rsatamiz.

$$a+bi \leftrightarrow \begin{pmatrix} ab \\ -ba \end{pmatrix}$$

moslik M va C to'plamlarining elementlari asosida o'zaro bir qiymatli, ya'ni har bir kompleks songa bitta matritsani va har bir matritsaga bitta kompleks sonni mos qo'yish mumkin. Bu moslikning elementlarini qo'shish va ko'paytirish amallariga nisbatan ham saqlanishini ko'rsatamiz.

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$$

$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i \quad \text{lardan,}$$

$$\begin{pmatrix} ab \\ -ba \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} cd \\ -dc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -b-d & a+c \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ab & ad+bc \\ -ba & ac-bd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bd & cd \\ -ad-bc & -dc \end{pmatrix}.$$

bu o'zaro bir qiymatli mosliklarning elementlarini qo'shish va ko'paytirishlarda ham bajarilishini ko'rdik. Demak, M – matritsalar to'plami C – kompleks sonlar maydoniga izomorf bo'lgan maydonni tashkil etadi.

$$M \approx C$$

Shu tariqa aniqlangan M maydon R haqiqiy sonlar maydoniga izomorf bo'lgan

$$\overline{M} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in R \right\} \text{ qism maydonga (maydon ostiga)}$$

ega. Bu esa C kompleks sonlar maydonini biror interpretatsiyalaridan biri ekanligini ko'rsatadi. Demak, kompleks sonlar maydoniga M matritsalar maydonidan ham kelish mumkin ekan. Bu holatdan kompleks sonlar maydonini kengaytirishda foydalanamiz. Shu maqsadda

$$\overline{Q} = \left\{ \begin{pmatrix} a & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{a} \end{pmatrix} \mid a, \beta \in C \right\}$$

Matritsalar to'plamini qaraymiz, bu yerda $a=a+bi$, $\beta=c+di$ – ixtiyoriy kompleks sonlar, $\overline{a}=a-bi$ $\overline{\beta}=c-di$ lar esa $a\beta$ larga qo'shma kompleks sonlar.

Bunday matritsalar qo'shish va ko'paytirishlar mavjud qoidalar bo'yicha bo'yicha bajariladi, ya'ni:

$$\begin{pmatrix} a & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{a} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varphi & \nu \\ -\overline{\nu} & \overline{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+\varphi & \beta+\nu \\ -\overline{\beta}-\overline{\nu} & \overline{a}+\overline{\varphi} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi & \nu \\ -\overline{\nu} & \overline{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\varphi - \beta\overline{\nu} & a\nu + \beta\overline{\varphi} \\ -\overline{\beta}\varphi - \overline{a}\overline{\nu} & -\overline{\beta}\nu + \overline{a}\overline{\varphi} \end{pmatrix}$$

Ikkita $\begin{pmatrix} a & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{a} \end{pmatrix}$ va $\begin{pmatrix} \varphi & \nu \\ -\overline{\nu} & \overline{\varphi} \end{pmatrix}$ matritsalariga teng matritsalar deyiladi, agar $a=\varphi$ $\beta=\nu$ bo'lsa.

Kvadrat matritsalarini qo'shish kommutativ va assosiativ, bunday matritsalarini ko'paytirish assosiativ va ko'paytirish qo'shishga nisbatan o'ng va chap distributivligini matritsalar nazariyasidan bilamiz.

Har bir $\begin{pmatrix} a & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{a} \end{pmatrix}$ matritsaga $\begin{pmatrix} -a & -\beta \\ -\overline{\beta} & \overline{a} \end{pmatrix}$ matritsa qarama – qarshi matritsa bo'ladi.

Demak, keltirilgan xossalardan $\bar{Q}$ matritsalar to'plamining halqa ekanligi kelib chiqadi.

$\bar{Q}$ halqada umuman olganda ko'paytirish kommutativ emas. Masalan,

$$\begin{pmatrix} i & o \\ o-i & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} o & i \\ i & o \end{pmatrix} \text{ bo'lib,}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i & o \\ o-i & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} o & -i \\ -i & o \end{pmatrix} \text{ dan}$$

$$\begin{pmatrix} o & i \\ i & o \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} o & -i \\ -i & o \end{pmatrix} \text{ kelib chiqadi.}$$

$\bar{Q}$ halqaning matritsasining determinanti

$$\begin{vmatrix} \alpha\beta \\ -\beta\alpha \end{vmatrix} = \alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} = (a+bi)(a-bi) + (c+di)(c-di) =$$

$$= a^2 - abi + abi + b^2 + c^2 - cdi + cdi + d^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

ga teng bo'lib, u holga teng bo'ladi, faqatgina $a=b=c=d=0$ bo'lsa, ya'ni $a=b=c=d=0$ bo'lsa. Bundan esa $\bar{Q}$ da nol matritsadan tashqari har bir matritsaga teskari matritsaning mavjudligi kelib chiqadi. Demak, $\bar{Q}$ da jismning barcha aksiomalari bajariladi va u jismni (*telo*) tashkil etadi.

$\bar{Q}$ jism o'z ichiga $\begin{pmatrix} a & c \\ -c & a \end{pmatrix}$ ko'rinishdagi barcha matritsalar to'plamini oladi, bu

yerda a, c lar haqiqiy sonlar. Demak, $\bar{Q}$ jism o'z ichiga C kompleks sonlar maydoniga izomorf bo'lgan maydonni oladi.

Bundan esa $\bar{Q}$ jismga izomorf bo'lgan va o'z ichiga C kompleks sonlar maydonining kengaytmasi bo'lgan Q jismning mavjudligi kelib chiqadi.

Q jismni qurish uchun $\bar{Q}$ matritsalar to'plamida R haqiqiy sonlar maydoniga izomorf bo'lgan $\bar{M}$ matritsalar to'plamining elementlarini haqiqiy sonlar bilan almashtirish yetarli, ya'ni

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = a \text{ deb olish yetarli. Buni ko'rsatamiz}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix}$$

matritsa haqiqiy a, b, c, d sonlarning (a, b, c, d) to'g'riligi bilan aniqlanadi.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ birlik matritsa esa } (1, 0, 0, 0) \text{ to'rtlik bilan aniqlanadi.}$$

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \text{ matritsalar esa } (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1) \text{ to'rtliklar bilan aniqlanadi.}$$

$\bar{Q}$ matritsalar to'plamining har bir matritsasini quyidagicha yoyib yozish mumkin:

$$\begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Bu yerda $\bar{M} \cong R$ bo'lgani uchun,

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \text{ larni mos ravishda } a, b, c, d \text{ haqiqiy sonlar bilan almashtiramiz.}$$

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \text{ larni o'z-o'ziga ko'paytirsak;}$$

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1$$

$$\begin{pmatrix} o & i \\ i & o \end{pmatrix} \begin{pmatrix} o & i \\ i & o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1$$

bo'lib, har birining kvadrati izomorfizmga asosan, -1 ga tengligini ko'ramiz. Agar bularni i, j, k deb belgilasak.

$$\begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix}$$

Matritsa $a+bi+cj+dk$ ifoda bilan almashadi

1-ta'rif. $a+bi+cj+dk$ ifodaga kvarternion deyiladi, agar bu yerda a, b, c, d lar haqiqiy sonlar

Barcha kvaternionlar to'plamiga *kvaternionlar jismi* deyiladi.

(«Kvaternion»—lotincha so'zdan olingan bo'lib, «to'rttadan» degan ma'noni anglatadi.)

$a=a+bi+cj+dk$ kvaternionni aniqlovchi a, b, c, d haqiqiy songa uning komponentlari yoki koordinatalari deyiladi.

Kvaternionlarni qo'shish mos koordinatalarini qo'shishga olib keladi.

$1, i, j, k$ elementlarga kvaternionlar jismining birliklari deyiladi. ulardan oxirgi uchta mavhum birliklar deyiladi.

Kvaternionlarni ko'paytirish matritsalarini ko'paytirishdek bajariladi.

Birliklarni ko'paytirish jadvalini tuzamiz $i^2=j^2=k^2=-1$ ni yuqorida aniqlagan edik.

$$\begin{aligned}
 ij &= \begin{pmatrix} i & o \\ o & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} o & i \\ i & o \end{pmatrix} = k \\
 jk &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} o & i \\ o & o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & o \\ o & -1 \end{pmatrix} = i \\
 ki &= \begin{pmatrix} o & i \\ i & o \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & o \\ o & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = j \\
 ji &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & o \\ o & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} o & -i \\ -i & o \end{pmatrix} = -k \\
 kj &= \begin{pmatrix} o & i \\ i & o \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & o \\ o & i \end{pmatrix} = -i \\
 ik &= \begin{pmatrix} i & o \\ o & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} o & i \\ i & o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -j
 \end{aligned}$$

$1i=i1=i$, $1j=j1=j$, $1k=k1=k$ lar orqali Q kvaternionlar jismida birliklarni ko'paytirish jadvalini tuzamiz

1 – jadval. Kvaternionlarni ko'paytirish jadvali

x	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

Kvaternionlarni ko'paytirishda ularni xuddi ko'phadlarni ko'paytirish kabi hadma – had bajariladi.

Bunda ko'paytuvchilarning kelish tartibiga qat'iy rioya qilinadi, chunki ko'paytirish kommutativ emas.

$$a = a_1 + b_1i + c_1j + d_1k \quad \beta = a_2 + b_2i + c_2j + d_2k \text{ larni ko'paytiramiz.}$$

$$\begin{aligned}
 a\beta &= (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k)(a_2 + b_2i + c_2j + d_2k) = (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2) + \\
 &+ (a_1b_2 + a_2b_1 + c_1d_2 - c_2d_1)i + (a_1c_2 + a_2c_1 + b_2d_1 - b_1d_2)j + (a_1d_2 + a_2d_1 + b_1c_2 - b_2c_1)k \quad (1)
 \end{aligned}$$

2-ta'rif. $a=a+bi+cj+dk$ va $\bar{a}=a-bi-cj-dk$ kvaternionlarga qo'shma kvaternionlar deyiladi.

Qo'shma kvaternionlar ko'paytmasiga bu kvaternionning normasi deyiladi va $N(a)$ deb belgilanadi.

$a\bar{a}=N(a)$ ni topish uchun (1) da

$a_1=a_2=a, b_1=b, c_1=c, d_1=d, b_2=-b, c_2=-c, d_2=-d$ desak,

$$a\bar{a}=N(a)=a^2+b^2+c^2+d^2$$

bo'ladi, shuningdek $a\bar{a}=N(\bar{a})=a^2+b^2+c^2+d^2$ ga teng. Demak,

$$N(a)=N(\bar{a}) \quad \text{va} \quad a\bar{a}=\bar{a}a \quad (2)$$

a va β kvaternionlar uchun

$$\overline{\alpha\beta}=\bar{\beta}\cdot\bar{\alpha} \quad (3)$$

tenglik o'rinli.

Buni isbot qilish uchun $\bar{\beta}\cdot\bar{\alpha}$ ni hisoblab uni $a\beta$ bilan taqqoslash yetarli.

Shuningdek, kvaternionlar ko'paytmasining normasi ular normalarining ko'paytmasiga teng.

$$N(a\beta)=(a\beta)(\bar{\beta}\bar{\alpha})=a(\beta\bar{\beta})\bar{\alpha}=aN(\beta)\bar{\alpha}=a\bar{\alpha}N(\beta)=N(a)N(\beta)$$

Q kvaternionlar to'plami jism bo'lganligi uchun har bir $a \neq 0$ kvaternionga teskari kvaternion mavjud:

$$a^{-1}=\frac{\bar{a}}{N(a)}$$

$xa=\beta$ tenglama berilgan bo'lsin. uni yechish uchun tenglik ikkala tomonini a^{-1} ga ko'paytiramiz.

$$xax^{-1} = \beta a^{-1} \Rightarrow x = \beta a^{-1} = \frac{\beta \bar{a}}{N(a)} \text{ bo'ladi}$$

R haqiqiy sonlar maydoniga izomorf bo'lgan $a=a+oi+oj+Ok$ ko'rinishdagi kvaternionlarning $\bar{R}$ to'plami kvaternionlar jismining qism maydoni bo'ladi. Q to'plamda C kompleks sonlar maydoniga izomorf bo'lgan yana uchta qis maydon mavjud, ular $a+bi$, $a+cj$, $a+dk$ ko'rinishdagi kvaternionlar to'plamlarini tashkil etadi.

Kvaternionlar jismi XIX asrning o'rtalarida ingliz matematigi Gamilton tomonidan qurilgan, Gamilton kvaternionlarni geometriya va fizikaga tadbiq qilish mumkinligini ko'rsatgan.

Kvaternionlarni matematika, fizika va mexanikaga tadbiqlarini ham ko'rish mumkin.

Har bir kvaternionni ikki qismga ajratish mumkin: a soni uning skalyar qismi, $bi+cj+dk$ uning vektor qismi deb qarash mumkin.

$v=bi+cj+dk$ vektorli qismi qo'shishga nisbatan kommutativ gruppani tashkil etadi, chunki bu to'plamda qo'shish gruppaning hamma aksiomalarini qanoatlantiruvchi algebraik amaldan iborat.

Bu grupp uch o'lchovli vektor fazaga izomorf. Bunda har bir

$$v_1=a_1i+b_1j+c_1k$$

kvaternionga $\bar{v}_1=\{a_1, b_1, c_1\}$ ni mos qo'yamiz. Shuning uchun har bir $\bar{v}=\{a,b,c\}$ vektorni geometrik interpetatsiyasi sifatida $v=ai+bj+ck$ kvaternionni olish mumkin.

v to'plamda ko'paytirish algebraik amal emas, chunki v ning ixtiyoriy ikkita elementini ko'paytirishda skalyar qismi noldan farqli bo'lgan kvaternion hosil bo'ladi va demak, v to'plamga tegisli bo'lmaydi. Lekin bu holda ham kvaternionlarni uch o'lchovli fazo bilan bog'liqligi mavjud.

Ikkita v_1 va v_2 larni ko'paytiramiz:

$$v_1 = a_1i + b_1j + c_1k$$

$$v_2 = a_2i + b_2j + c_2k$$

$$v_1 v_2 = -(a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2) + (b_1c_2 - b_2c_1)i + (a_2c_1 - a_1c_2)j + (a_1b_2 - a_2b_1)l$$

bu ko'paytmaning qo'shiluvchisini (birinchi) $\vec{v}_1$ va $\vec{v}_2$ vektorlarning qarama – qarshi ishora bilan olingan skalyar ko'paytmasidan iborat bo'lib, qolgan qo'shiluvchilar esa $\vec{v}_1$ va $\vec{v}_2$ larning vektorli ko'paytmasini tashkil etadi. Demak,

$$v_1 v_2 = -(\vec{v}_1, \vec{v}_2) + [\vec{v}_1, \vec{v}_2] \quad (5)$$

ga teng. Bunda tenglikning chap tomoni v_1 va v_2 kvaternionlardan iborat bo'lib. O'ng tomonida ularga mos $\vec{v}_1 = \{a_1, b_1, c_1\}$ va $\vec{v}_2 = \{a_2, b_2, c_2\}$ vektorlar berilgan.

(5) tenglik kvaternionlarni ko'paytirish vektorli hisob nazariyasida ikkita harxil (skalyar, vertikal) ko'paytma orasidagi bog'lanish hozirgi davrda fanda keng tarmoqli qo'llanishlarga ega.

Kvaternionlar sonlar nazariyasida ham qo'llaniladi. Masalan kvaternionlarni ko'paytirishdan Eyler ayniyati osongina kelib chiqadi.

$$(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2)(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 + d_2^2) = (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2)^2 + (a_1b_2 + a_2b_1 + c_1d_2 - c_2d_1)^2 + (a_1c_2 + a_2c_1 + b_2d_1 - b_1d_2)^2 + (a_1d_2 + a_2d_1 + b_1c_2 - b_2c_1)^2$$

Kompleks sonlar maydoni ikkita birlik, ya'ni 1 va i dan iborat bo'lgan sonli maydonni tashkil etadi. Uchta birlikdan iborat bo'lgan sonli maydonni tashkil etish yaxshi natijaga olib kelmaydi.

Gamilton to'rtta birlik $1, i, j, k$ dan iborat bo'lgan kengaytmanni topadi, ya'ni bu kvaternionlar jismidir.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Фадив Д.К. «Лекции по алгебре» Москва. Наука 1984 г.
2. Кострикин А.И. «Введение в алгебру» Москва. Наука 1977 г.
3. Демидов И.Т. «Основание арифметики» Москва. Учпедгиз. 1963 г.

4. Курош. А.Г. «Курс высшей алгебры» Москва Физматгиз. 1962 г.
5. Курош. А.Г. «Лекции по общей алгебре» Москва. Физматгиз. 1962 г.
6. Арнольд. И.В. «Теоретическая арифметика» Москва. Наука. 1939 г