

DIFFERENSIAL TENGLAMALAR NAZARIYASI VA UNING MATEMATIKA FANIDAGI AHAMIYATI.

Saidov Asqar Hayitnazarovich

Buxoro davlat texnika universiteti akademik litseyi

Matematika fani o'qituvchisi

Annotatsiya. Ushbu maqolada differensial tenglamalarning paydo bo'lishi va uning fan va texnikadagi ahamiyati haqida qisqacha bayon qilingan.

Kalit so'zlar. Oddiy differensial tenglama, differensial tenglamaning yechimi, Koshi masalasini qo'yilishi, umumiy yechim, maxsus yechim

Annotatsion. This article briefly outlines the emergence of differential equations and their significance in science and technology.

Keywords. Ordinary differential equation, solution of a differential equation, formulation of the Cauchy problem, general solution, singular solution

Differensial tenglamalar nazariyasiga oid masalalar dastlab XVI-XVII asrda hisoblash matematikasiga oid ishlarda uchraydi. J.Neper (1550-1617) logarifmik jadvallarni yaratishda bunday tenglamalarga duch kelgan.

M nuqta O nuqtadan chiqib, V o'zgarmas tezlik bilan harakat qiladi; N nuqta V tezlik bilan A nuqtadan chiqib $AV = 10^7$ kesmada NB masofaga proporsional tezlik bilan B ga qarab harakatlanadi. OM kesmaning uzunligi NB kesmaning niper logarifmi bo'ladi.

$OM = y$ va $NB = x$ desak bu nuqtalarning tezligi

$$\frac{dy}{dt} = V, \frac{dx}{dt} = -\frac{Vx}{10^7}$$

x va Neper logarifmi $y = Lx$ o'rtasidagi bog'lanish

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{10^7}{x}; x_0 = 10^7, y_0 = 0 \text{ bo'ladi.}$$

Matematik bilish sohasida differensial tenglamalar keltiriladigan masalalarning dastlabkisi 1638 yilda G.Galiley (1564-1642) tomonidan e'lon qilingan jismning qarshiliksiz muhitda tushishi muammosi va 1628 yilda R.Dekart (1596-1650)

tomonidan e'lon tomonidan e'lon qilingan yorug'likning sinish qonunida “urinmaga teskari masala” bo'lib hisoblanadi.

I.Nyuton (1642-1727) va G.V.Leybnits (1646-1716) larning ishlaridan boshlab differentsial tenglamalarning tarixining birinchi davri boshlanadi. Nuqtaning va qattiq jismning dinamikasi masalalarini o'rganish, shuningdek ba'zi geometrik masalalarga differensial va integral hisobning qo'llanilishi birinchi va ikkinchi tartibli oddiy tenglamalarni guruhlariga ajratdi.

XVIII asrning birinchi yarmida differensial tenglamalar nafaqat, balki differensial geometriya va variatsion hisobda ham kuchli qurol bo'ldi. XVIII asrning ikkinchi yarmida matematik fizika masalalari, xususan torning tebranish masalasi xususiy hosilali differensial tenglamalarning paydo bo'lishini va bular sirtlar nazariyasida keng qo'llanilishiga olib keldi.

Qator differensial tenglamalar Nyuton tomonidan “Natural falsafaning matematik boshlang'ichlari” («Matematische nachalo' naturalnoy filosofii») (1686) asarida integrallangan “matematik boshlang'ichlarda” differensial tenglamalar va ularning integrallarini analitik shaklda yozilmagan, ular sintatik-geometrik chizmalar yordamida bayon qilingan. Mexanika masalalarining analitik shaklini birinchi bo'lib L.Eyler keltirgan. Differensial tenglamalar oshkor ko'rinishda Nyutonning 1671 yilda yozilgan va 1736 yilda e'lon qilingan “Funksiyalar usuli va cheksiz qatorlar” asarida uchraydi.

“Differensial tenglama” terminini Leybnits kiritgan. Uning izdoshlari Yakov Bernulli (1654-1705) va Ivan Bernulli (1667-1748) differensial tenglamalarni yechish uchun qatorlarga yoyishni qo'lladilar.

Ya.Bernulli bir o'zgaruvchini o'z ichiga olmagan ikkinchi tartibli tenglamaning tartibini pasaytirish uchun $y'=p$ parametrlar kiritishni qo'llagan.

Differensial tenglamalar nazariyasining keyingi rivojiga Peterburg Akademiyasi akademigi L.Eyler (1707-1783), fransuz matematiklari A.Klero (1713-1765), Sh.Dalamber (1717-1783) va Sh.L.Lagranj (1736-1813) katta hissa qo'shdilar.

Eyler chiziqli bir jinsli tenglamani yechish uchun $y=e^{kx}$ almashtirish kiritdi. Dalamber chiziqli bir chiziqlimas tenglamaning umumiy yechimi uning xususiy yechimi bilan mos chiziqli bir jinsli tenglama umumiy yechimi yig'indisiga tengligini ko'rsatdi. Lagrang o'zgarmasli variatsiyalash usulini ishlab chiqdi. Lagrang chiziqli bir jinsli tenglamaning r ta xususiy yechimi ma'lum bo'lsa, uning tartibli r tagacha pasaytirish mumkinligini isbotlaydi. Eyler va Klero integrallovchi ko'paytuvchi kiritishni taklif qilishdi va $Mdx+Ndx$ tenglamaning integrallanish shartini kiritdi.

Maxsus yechimlarni birinchi marta B.Teylor (1685-1731) 1715 yilda uchratgan. 1736 yilda A.Klero Maxsus va umumiy yechimlarni ajratgan.

XIX asrning boshida limit, cheksiz kichik miqdor, induksiya uzluksizligi, differensial, aniq integral kabi tushunchalarga aniq matematik ta'rif berildi va matematikaga joriy qilishdi. Buning boshida O.Koshi (1788-1857), K.Gauss (1777-1855) va chech olimi B.Bolzano (1781-1848) turdi.

1820-1830 yillarda Koshi $y'=f(x,y)$ tenglamaning $x=x_0$, $y=y_0$ boshlang'ich shartlarda yechimi mavjudligi va yagonaligi shartini isbotladi. Yechimning mavjudligi va yagonaligi F.Muan'o (1804-1884), R.Linshiu (1832-1903) tomonidan to'liq isbotlandi. Dsh. Peano (1858-1932) $y'=f(x,y)$ tenglamaning $x=x_0$, $y=y_0$ boshlang'ich shartlarda $f(x,y)$ uzluksiz bo'lganda hech bo'lmaganda bitta yechimi mavjudligini isbotladi. 1880 yilda E Pikar (1856-1941) ketma-ket yaqinlashishlar usulini ishlab chiqdi.

Xususiy hosilali tenglamalar sistemasi yechimi mavjudligini muammosi S.V.Kovalevskaya (1850-1891) tomonidan o'rganilgan.

Yangi matematik analizlarning yangi mukammal vositalari yordamida maxsus yechimlar muammosi bilan Muan'o, A.Kurno (1801-1874), maxsus yechimlarning zamonaviy nazariyasi G.Dorou (1842-1917; 1870), Pikar (1886-1887), G.Kristal (1851-1911; 1896) va boshqalar tomonidan ishlab chiqilgan.

Differensial tenglamalarning kvadraturada integrallash masalasi bilan Litsvill (1809-1882), D.Bernulli, P.L.Chevishev, V.P.Maksimovich, D.D.Morduxay-Boltovskaya va boshqa olimlar shug'ullangan.

Xususiy hosilali tenglamalar nazariyasi bilan I.F.(1765-1825) shug'ullanib, bir qancha yutuqlarga erishgan. U 1814 yilda chiziqli tenglama $F_1dx_1 + F_2dx_2 + \dots + F_ndx_n = 0$, bunda $F_1, F_2, \dots, F_n$ - n o'zgaruvchidan bog'liq funksiya, eng kam amal bajarib integrallash masalasini qo'ydi. Bu masalani "muammosi" deb atadi. Bu masala bilan E.Gursa (1858-1936) muvofaqqiyatli shug'ullanadi. Mexanikada Yakovi tomonidan ishlab chiqilgan ko'p o'zgaruvchili ikkinchi tartibli chiziqlimas tenglamani integrallash usullari katta ahamiyatga ega bo'ldi.

Yuqori tartibli xususiy hosilali tenglamalar nazariyasi matematik fizika va qayishqoqlik nazariyasi masalalari bilan uzviy bog'langan holda rivojlandi va trigonometrik qatorlar nazariyasi, kompleks o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasi, variatsion hisob apparati keng tadbiiq qilindi. Shunday qilib, XIX asrning birinchi yarmi turli chegaraviy masalalarni yechishda muhim yutuqlar keltirdi. J.B.Furening (1768-1830) issiqlik o'tkazuvchanlik nazariyasidagi klassik ishlari ko'plab tadqiqotlar uchun tayanch punkti bo'lib qoldi.

XIX asr oxiri va XX asr boshida oddiy differensial tenglamalar nazariyasida ikkita yo'nalish muhim o'rin tutadi. Ularning biri guruhlar nazariyasi tushunchasining tarqalishi bilan bog'liq, ikkinchi yo'nalish esa koinot mexanikasi va astronomiya masalalarini o'rganish bilan bog'liq.

Guruhlar nazariyasi g'oyasi dastlab o'zini algebrada oqlagan bo'lsa, keyinchalik matematikaning boshqa sohalariga ham tadbiiq qilina boshladi.

XIX asrning 70-yillaridan boshlab differensial tenglamalarning sifat nazariyasi tadqiq qilish boshlandi. Differensial tenglamalarning sifat nazariyasi A.Puankare va A.M. Lyakunov tomonidan yaratildi.

A. Puankare tenglamani integrallamasdan uning integral chiziqlari qanday joylashishini tadqiq qilish masalasini qo'ydi. Lyakunov chekli sondagi parametrlardan bog'liq mexanik sistemalarning harakati va muvozanati turg'unligi masalasini qo'ydi va bir necha ishlarini shu sohaga bag'ishladi.

XX asrning boshidan boshlab differensial tenglamalarni sonli integratsiyasi usullari paydo bo'ldi va bu sohadagi ishlar, yangi usullari va bu usullarning echimiga yaqinlashishi masalalari hozirgi paytda ham davom etmoqda.

Biz birinchi tartibli hosilaga nisbatan yechilmagan oddiy differensial tenglamalarni oddiy differensial tenglamalarni ko'ramiz:

$$F(x, y, y') = 0 \quad (1')$$

bunda x -erkli o'zgaruvchi, y -uning noma'lum funksiyasi, $y' = \frac{dy}{dx}$ esa noma'lum funksiyasining hosilasi.

(1') tenglamaning muhim xususiy hosilaga to'xtalamiz.

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (1)$$

bu tenglamaga hosilaga nisbatan yechilgan oddiy differensial tenglama deyiladi. (1)tenglama (1') tenglamaga nisbatan yechish natijasida hosil bo'lgan deb qaramasdan, balki (1) ga $f(x, y)$ funksiya Γ sohada berilgan deb qaraymiz.

Izoh 1. Soha deyilgan faqat yopiq yoki faqat ochiq bog'langan to'plamni olamiz. Agar berilgan Γ to'plamning ixtiyoriy ikki nuqtasini tutashtiruvchi va shu to'plamga tegishli biror chiziq mavjud bo'lsa, u holda Γ to'plam bog'langan bo'ladi.

Izoh 2. Agar I intervalda yopiq bo'lsa, u holda uning chap uchiga o'ng hosila, o'ng uchiga esa chap hosila nazarda tutiladi.

Tarif 1. (1) chi tenglama berilgan bo'lib, unda $f(x, y)$ funksiya R^2 tekislikning Γ sohasida aniqlangan bo'lsin. Agar I (ochiq, yopiq yoki yarim ochiq) intervalda aniqlangan $\varphi(x)$ funksiya uchun quyidagi uch shart

$$\left. \begin{array}{l} 1^\circ (x, \varphi(x)) \in \Gamma, \Gamma \subset R^2, x \in I \\ 2^\circ \varphi(x) \in C^1(I) \\ 3^\circ \frac{d\varphi(x)}{dx} = f(x, \varphi(x)), x \in I \end{array} \right\} \quad (2)$$

bajarilsa, u holda bu funksiya I intervalda (1) differensial tenglamaning yechimi deyiladi. (1) differensial tenglamaning har bir $y = \varphi(x)$ yechimga mos kelgan egri chiziq (ya'ni $y = \varphi(x)$ funksiyaning grafigi) shu tenglamaning integral egri chizig'i

deyiladi. (1) tenglamaning yechimi ba'zi hollarda oshkormas $F(x,y)=0$ ko'rinishda bo'lsa, ba'zi hollarda parametrik $x=x(t), y=y(t), t_0 < t < t_1, x'(t) \neq 0$ ko'rinishda bo'lishi mumkin.

Koshi masalasini qo'yilishi.

(1) tenglama berilgan bo'lib unda $f(x,y)$ funktsiya R^2 tekislikning Γ sohasida aniqlangan, uzluksiz va I interval x o'qidagi interval bo'lsin, x_0 ni o'z ichiga oladigan I intervalni va shu I intervalda aniqlangan uzluksiz differensiallanuvchi hamda ushbu

$$\left. \begin{array}{l} 1^\circ (x, \varphi(x)) \in \Gamma, \quad x \in I \\ 2^\circ \varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \quad (x \in I) \\ 3^\circ \varphi(x_0) = y_0, (x_0, y_0) \in \Gamma \end{array} \right\} \quad (3)$$

Shartlarni qanoatlantiruvchi $y = \varphi(x)$ funktsiyani topish talab etiladi.

Bu masala qisqasha $y' = f(x,y), y(x_0) = y_0$ kabi yoziladi va (1) tenglama uchun koshi masalasi (yoki boshlang'ich masala) deyiladi.

(3)-shartni qanoatlantiruvchi $y = \varphi(x)$ funktsiya I intervalda (k) Koshi masalasini yechimi deyiladi. Endi Γ sohaning (k) masala yagona yechimga ega bo'ladigan (x,y) nuqtalaridan tuzilgan kesmini $D_2^* \subset \Gamma$ ($D_2 \equiv \Gamma$) deb belgilaylik. Shunga ko'ra D_2^* to'plamning har bir (x,y) nuqtasida (1) tenglamaning yagona integral chizig'i o'tadi.

Tarif 2. (1) differensial tenglama x,c o'zgaruvchilarning biror o'zgarish sohasida aniqlangan hamda x bo'yicha uzluksiz differensiallanuvchi

$$y = \varphi(x, c) \quad (4)$$

Funktsiya berilgan bo'lsin. Agar $\forall (x,y) \in D_2^*$ nuqta uchun (4) munosabat c ning $c = \psi(x, y)$ (4') qiymatini bir qiymatli aniqlasa va bu qiymatni ushbu $\frac{dy}{dx} = \varphi'_x(x, c)$ (4'') tenglikka qo'yish natijasida (1) tenglama hosil bo'lsa, u holda (4) funktsiya (1) tenglamaning D_2 to'plamda aniqlangan umumiy yechimi deyiladi.

Tarif 3. (1) tenglama va (4) chiziqlar oilasi berilgan bo'lsin. Agar 1) $f(x,c)$ funktsiya I intervalda x bo'yicha uzluksiz hosilaga ega bo'lsa;

2) Har bir $(x, y) \in D_2^*$ nuqta uchun (4) munosabat c ning (4') qiymatini bir qiymatli aniqlasa;

3) $y = \varphi(x, \psi(x, y))$ funksiya (1) tenglamaning yechimi bo'lsa, u holda (4) funksiya (1) tenglamaning *umumiy yechimi* deyiladi.

Har bir natijasida Koshi masalasi yagona yechimga ega bo'ladigan yechim xususiy yechim deyiladi, (1) tenglamaning barcha yechimlarini topish asosiy masala hisoblanadi. Barcha yechimlarini topish jarayoni differensial tenglamani integrallash deyiladi. Agar (1) tenglamaning yechimini elementar funksiyalar va ularning integrallari yordamida yozish mumkin bo'lsa, u holda differensial tenglama kvadraturalarda integrallanadi deyiladi.

$D = D_2 / D_2^*$ to'plamning har bir (x, y) nuqtasidan o'tadigan integral chiziqlar yagona emasligi kelib chiqadi. Har bir nuqtasidan yechimning yagonaligi buziladigan yechimlar *maxsus yechimlar* deyiladi. Umumiy yechish formulasi (4) maxsus yechimlarni o'z ichiga olmaydi. Agar $\Phi(x, y, c) = 0$ munosabat D_2^* to'plamda $y = \varphi(x, c)$ umumiy yechimni aniqlasa, u holda (4'') ni (1) differensial tenglamaning umumiy integrali deyiladi.

Masalan ; $y = ce^x$ chiziqlar oilasi berilgan bo'lsin. U holda $y' = ce^x$ izlangan differensial tenglama $y' = y$ bo'ladi. Ravshanki, bu tenglamaning umumiy yechimi; $y = ce^x$

Agar umumiy yechim ma'lum bo'lmasa, Koshi masalasini yechish qiyinlashadi. Bunda differensial tenglama taqribiy integrallash metodlari yordamida yechiladi. Foydalanilgan adabiyotlar.

1. Пономаров К.К “Составление дифференциальных уравнение”
2. Камке. “Справочник по дифференциальным уравнениям”
3. Филипов А. Ф. “Сборник задач по дифференциальным уравнениям”
4. Степанов В.В. “Курс дифференциальных уравнение” М 1954й.